Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Societatea de Ştiinţe Matematice din Romania

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 7 Martie 2009

CLASA a X-a SOLUŢII ŞI BAREMURI ORIENTTIVE

Problema 1. Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două funcţii cu proprietatea

$$f(g(x)) = g(f(x)) = -x,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
a) Să se arate că f şi g sunt funcţii impare.
b) Daţi un exemplu de funcţii cu proprietatea din enunţ.

Soluţie. a) Din $f(g(x)) = g(f(x)) = -x$ deducem $g(f(g(x)) = g(-x)$ pentru orice x real .... 2 puncte
Din $g(f(x)) = -x$ obţinem că $g(f(g(x))) = -g(x)$ pentruorice $x \in \mathbb{R}$ . . 2 puncte
Cele două relaţii de mai sus implică imparitatea funcţiei g. Analog pentru funcţia f .... 2 puncte
b) Funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ date prin $f(x) = x, g(x) = -x$ verifică proprietate din enunţ. .... 1 punct

Problema 2. Să se determine numerele complexe z_1, z_2, z_3 de acelaşi modul, cu proprietatea că $z_1 + z_2 + z_3 = z_1z_2z_3 = 1$.

Soluţie. Din condiţia dată deducem $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ . . . . . . 1 punct
Prin conjugare, din $z_1+z_2+z_3 = 1$ deducem $z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1 = 1 = z_1z_2z_3$ 2 puncte
Din cele două egalităţi precedente

$$(1 - z_1)(1 - z_2)(1 - z_3) = 0$$

.... 2 puncte
de unde $\{z_1, z_2.z_3\} = \{1, i, -i\}$ .... 2 puncte

Problema 3. Fie mulţimile $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 3^x = x + 2\}$ şi $B = \{x \in \mathbb{R} \mid \log_3(x + 2) + \log_2(3^x - x) = 3^x - 1\}$. Să se arate că:
a) $A \subseteq B$;
b) $B \not\subset \mathbb{Q}$ şi $B \not\subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Soluţie. a) Fie $x \in A$. Atunci $3^x = x + 2$, de unde $x = \log_3(x + 2)$ şi $1 = \log_2(3^x - x)$. Prin adunare obţinem $\log_3(x+2)+\log_2(3^x-x) = 3^x-1$,adică $x \in B$. Deci $A \subseteq B$ .... 3 puncte

b) $1 \in B$ deci $B \not\subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .... 1 punct

Fie $a \neq 1$ astfel încât $3^a = a + 2$. Atunci $a \in B$ (din a)) şi arătăm că $a \in \mathbb{R} \setminus Q$, deci va rezulta $B \not\subset \mathbb{Q}$. Prin absurd, dacă $a = m/n$ fracţie ireductibilă, implică $3^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n} + 2 \in \mathbb{Q}$, deci $3^{\frac{m}{n}} \in \mathbb{Q}$, adică $n = 1$ şi prin urmare $3^m = m + 2$, implicând $m = 1$, absurd. .... 3 puncte

Problema 4. a) Fie z_1, z_2, z_3 numere complexe nenule de acelaşi modul astfel încât $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Să se arate că punctele $A_1(z_1), A_2(z_2), A_3(z_3)$ sunt vârfurile unui triunghi echilateral.

b) Fie $n \geq 3$ un număr natural şi fie $U_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ mulţimea rădăcinilor de ordin n ale unităţii. Să se determine numărul maxim de elemente ale unei mulţimi $A \subset U_n$ cu proprietatea că $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$ pentru orice $z_1, z_2, z_3 \in A$.

Soluţie. a) De exemplu, geometric, faptul că numerele au acelaşi modul şi verifică $z + 1 + z_2 + z_3 = 0$ înseamnă că triunghiul cu aceste afixe are $G = H$, deci e echilteral. .... 1 punct

b) Dacă n nu e multiplu de 3, nu există triunghiri echilaterale cu vârfurile în afixe din U_n, deci maximul cerut este n .... 3 puncte

Dacă $n = 3k$, atunci din cele k triunghiuri echilaterale cu vârfuri în U_n putem alege cel mult câte două vârfuri din fiecare, adică cel mult $2k$ elemente. De exemplu $A = \{\omega^3, \omega^6, \ldots, \omega^{3k}\} \cup \{\omega^2, \omega^5, \ldots, \omega^{3k-1}\}$ unde $\omega = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$ .... 3 puncte

Timp de lucru 3 ore + 1/2 oră pentru întrebări lămuritoare asupra enunţurilor
Fiecare problemă este punctată de la 0 la 7 puncte